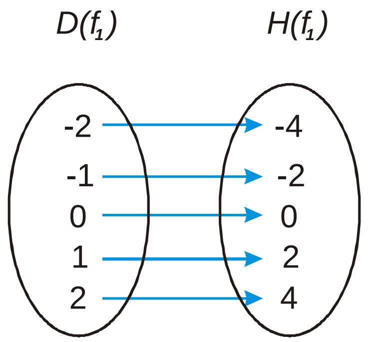
4.1.3 Složené funkce

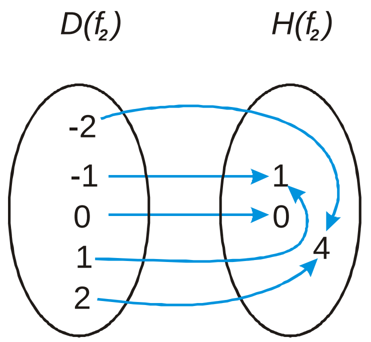
Předpoklady: 4101

Máme dvě funkce:

$$f_1 = 2x \qquad\qquad f_2 = x^2$$

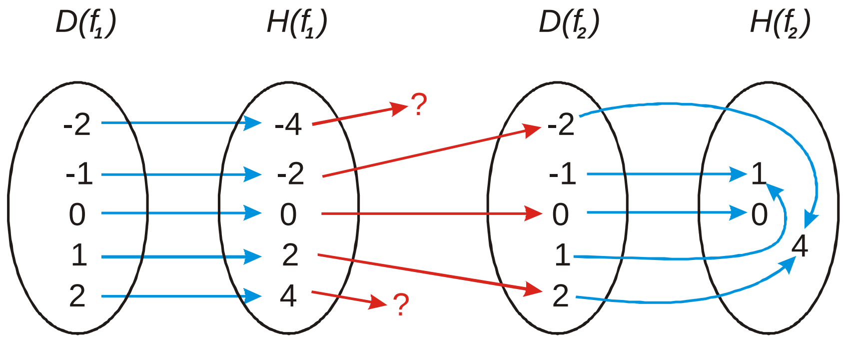
$$D(f_1) = \{-2,-1,0,1,2\} \qquad\qquad D(f_2) = \{-2,-1,0,1,2\}$$





Zkusíme spojit oba obrázky a poskládat šipky obou funkcí za sebe $\Rightarrow$ získáme novou funkci, která vznikla složením obou původních a říká se jí **složená funkce**.

Jak vypadá obrázek funkce složené z funkcí f_1 a f_2?



Jak probíhá zobrazování čísel u složené funkce?
Například pro číslo $-1 \in D(f_1)$:

- nejdříve funkce f_1 zobrazí číslo $-1 \in D(f_1)$ na číslo $-2 \in H(f_1)$,
- číslo –2 se nachází jak v množině $H(f_1)$ tak v množině $D(f_2)$ a tak můžeme tyto dva výskyty čísla –2 propojit červenou šipkou,
- poté funkce f_2 zobrazí číslo $-2 \in D(f_2)$ na číslo $4 \in H(f_1)$.

Př. 1: Prohlédni si propojování množin $H(f_1)$ a $D(f_2)$ pomocí červených šipek. Jaké možnosti mohou nastat? Získáme vždy nepřerušenou cestu z množiny $D(f_1)$ do množiny $H(f_2)$? Kdy je možné vytvořit celou cestu?

V obrázku jsou tři možnosti:

- číslo se nachází v množině $H(f_1)$ i v množině $D(f_1)$ (čísla –2; 0; 2) $\Rightarrow$ můžeme nakreslit červenou spojovací šipku a tím vytvořit celou cestu od množiny $D(f_1)$ až do množiny $H(f_2)$,
- číslo se nachází v množině $H(f_1)$, ale nenachází se v množině $D(f_1)$ (čísla –4; 4) $\Rightarrow$ nemůžeme nakreslit červenou spojovací šipku, cesta z množiny $D(f_1)$ končí v množině $H(f_1)$,
- číslo se nenachází v množině $H(f_1)$, ale nachází se v množině $D(f_2)$ (čísla –1; 0; 1) $\Rightarrow$ nemůžeme nakreslit červenou spojovací šipku, nekompletní cesta do množiny $H(f_2)$ začíná v množině $D(f_2)$.

Celou cestu je možné vytvořit pouze v případě, že šipka funkce f_1 končí u čísla, které patří jak do množiny $H(f_1)$ tak do množiny $D(f_2)$.

Jak získáme hodnoty složené funkce?
Dosadíme výsledek z funkce f_1 do funkce f_2.

Naši složenou funkci označíme například $h(x)$.
Jak se zapisuje, že funkce $h(x)$ je složená?

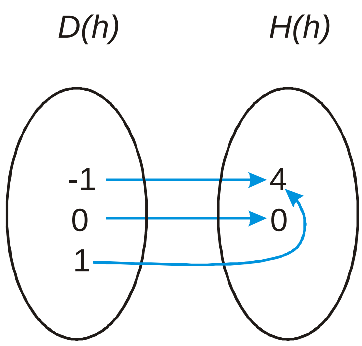
- $h(x) = f_2(f_1(x)) \Rightarrow$ do f_2 dosazujeme výsledky f_1.
- $h(x) = f_2 \circ f_1 \Rightarrow h(x)$ vznikla uplatněním f_2 na hodnoty funkce f_1.

Konkrétní předpis: $h(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(2x) = (2x)^2$

Jak je definována $h(x)$?
1) $D(h)$ jsou $x \in D(f_1)$, ze kterých získáme hodnoty, které patří do $D(f_2)$.
2) $H = h(x)$ funkční hodnotu získáme tak, že výsledek f_1 dosadíme do f_2.

Př. 2: Uveď předpis a definiční obor výše zavedené funkce $h(x)$.

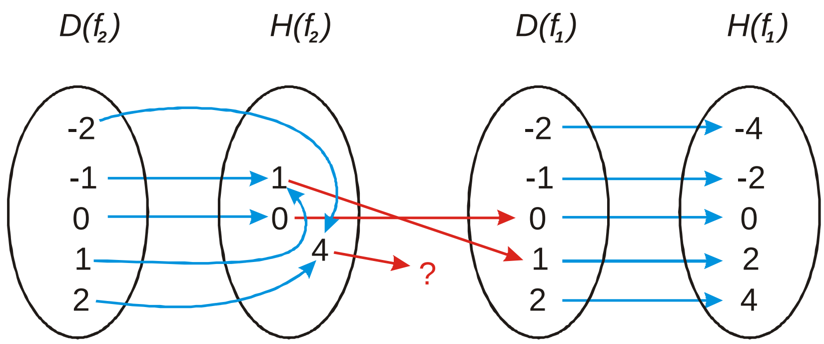
$h(x) = (2x)^2 = 4x^2$
Do předpisu funkce $f_2 = x^2$ jsme za *x* dosadili předpis funkce $f_1 = 2x$.



$D(h) = \{-1, 0, 1\}$
Do definičního oboru funkce *h* zahrneme jen taková čísla z $D(f_1)$, pro která v obrázku spojené funkce existuje celá cesta až do množiny $H(f_2)$.

Záleží na tom, v jakém pořadí funkce složíme?

Př. 3: Urči funkci $i(x) = f_1(f_2(x))$ (předpis, definiční obor, nakresli obrázek).



Předpis: $i(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x^2) = 2(x)^2 = 2x^2$

$D(i) = \{-1;01\}$ $H(i) = \{0;2\}$

Záleží na tom, v jakém pořadí funkce skládáme (skládání funkcí není komutativní).

Př. 4: Jsou dány funkce $f(x) = -2x$ a $g(x) = \log_2 x$. Urči funkce $k = g \circ f$ a $l = f \circ g$.

a) Určujeme $k = g \circ f$.

Předpis: $k(x) = g \circ f = g(f(x)) = g(-2x) = \log_2(-2x)$.

Definiční obor: $D(f) = R$, $D(g) = (0;\infty)$.

Kdy vypadne z funkce $f(x) = -2x$ číslo větší než nula?

$-2x > 0 \quad / : (-2)$

$x < 0$

$D(k) = (-\infty, 0)$

b) Určujeme $l = f \circ g$.

Předpis: $l(x) = f \circ g = f(g(x)) = f(\log_2 x) = -2(\log_2 x) = -2\log_2 x$.

Definiční obor: $D(g) = (0;\infty)$, $D(f) = R$ $\Rightarrow$ je jedno, co vyleze z $g(x)$, záleží pouze na tom, co je možné dosadit do $g(x)$.

$D(l) = (0;\infty)$

Opět se ukázalo, že záleží na pořadí, ve kterém funkce složíme.

Př. 5: Jsou dány funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 2x - 1$. Urči funkce $k = g \circ f$ a $l = f \circ g$.

a) Určujeme $k = g \circ f$.

Předpis: $k(x) = g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{2}{x} - 1$.

Můžeme postupovat i obráceně: $k(x) = g \circ f = 2(f(x)-1) = \frac{2}{x} - 1$.

Definiční obor: $D(f) = R - \{0\}$, $D(g) = R \Rightarrow$ nezáleží na tom, co dosadíme do $g(x)$

$D(k) = R - \{0\}$.

b) Určujeme $l = f \circ g$.

Předpis : $l(x) = f \circ g = \frac{1}{(g(x))} = \frac{1}{2x-1}$.

Definiční obor: $D(g) = R$, $D(f) = R - \{0\}$, $\Rightarrow$ do $f(x)$ nesmíme dosadit 0.

$2x - 1 \neq 0$

$2x \neq 1$

$x \neq \frac{1}{2}$

$D(l) = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Př. 6: Daná funkce $y = g(x) = \sqrt{|x+1|}$ je složena z funkcí $f_1; f_2; f_3$, takto $g(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Urči funkce $f_1; f_2; f_3$.

Funkce můžeme zjišťovat zevnitř nebo zvenku.

Zevnitř: $y = g(x) = \sqrt{|x+1|} = \sqrt{|f_1(x)|} \quad \Rightarrow \quad f_1 = x+1$.

$y = g(x) = \sqrt{|f_1(x)|} = \sqrt{f_2(f_1(x))} \quad \Rightarrow \quad f_2 = |x|$.

$y = g(x) = \sqrt{f_2(f_1(x))} = f_3(f_2(f_1(x))) \quad \Rightarrow \quad f_3 = \sqrt{x}$.

Zvenku: $y = g(x) = \sqrt{|x+1|} = f_3(|x+1|) \quad \Rightarrow \quad f_3 = \sqrt{x}$.

$y = g(x) = f_3(|x+1|) = f_3(f_2(x+1)) \quad \Rightarrow \quad f_2 = |x|$.

$y = g(x) = f_3(f_2(x+1)) = f_3(f_2(f_1(x))) \quad \Rightarrow \quad f_1 = x+1$.

V obou případech získáme stejný výsledek.

Pedagogická poznámka: Rozhodně není nutné, aby studenti přesně dodržovali jeden z předchozích postupů. Stačí, když se orientují a jsou schopni funkce nacházet.

Př. 7: Je dána složená funkce $y = g(x) = \log_2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Urči funkce, ze kterých je složena, a její definiční obor.

$f_1 = x^2 + 1 \qquad f_2 = \frac{1}{x} \qquad f_3 = \log_2 x$

Definiční obor:

$D(f_1) = R$, $H(f_1) = \langle 1;\infty)$

$D(f_2) = R - \{0\}$, dosazujeme výsledky $f_1(x)$ (tedy kladná čísla) $\Rightarrow$ žádné omezení.

$H(f_2) = (0;1\rangle$

$D(f_3) = (0;\infty)$, dosazujeme $H(f_2) = (0;1\rangle$ $\Rightarrow$ žádné omezení $\Rightarrow$ $D(g) = R$.

Ve skutečnosti se neučíme nic nového. Všechno už jsme dělali, jen jsme tomu neříkali složená funkce.
Například při kreslení grafu metodou sledování výpočtu, jsme kreslili graf složené funkce po jednotlivých krocích, které odpovídaly jednotlivým funkcím.

Shrnutí: Při skládání funkcí do složené funkce záleží na pořadí.